

Prädikatenlogik

1. Syntax und Semantik

Man kann die Prädikatenlogik unter einem syntaktischen und einem semantischen Gesichtspunkt sehen. Bei der Behandlung syntaktischer Aspekte macht man sich Gedanken darüber, welche prädikatenlogischen Formeln zulässig sind und welche formalen Schlüsse mit diesen Formeln zulässig sind. Beschäftigt man sich hingegen mit semantischen Fragen, so untersucht man die Bedeutungen, die den Symbolen in einer prädikatenlogischen Formel zuordenbar sind. Nachfolgend wird auf die Unterscheidung zwischen Syntax und Semantik Wert gelegt. Zunächst jedoch zu einigen grundlegenden Begriffen aus der Prädikatenlogik:

Definition: "Syntax"

- a. Die "Sprache" der Prädikatenlogik (1.Stufe) besteht aus den folgenden Elementen (Alphabet):
 - (i) Variablen: x, y, z, \dots (aufzählbare Menge)
 - (ii) Funktionssymbole: f, g, h, \dots
Hinweis: Es handelt sich um eine aufzählbare Menge. Jedes Symbol hat eine bestimmte "Stelligkeit", wobei 0-stellige Symbole Konstanten sind: a, b, c, \dots
 - (iii) Relationssymbole oder Prädikate: $P, Q, R \dots$
Hinweis: Es handelt sich um eine aufzählbare Menge. Relationssymbole drücken Relationen zwischen den ihnen übergebenen Argumenten aus. Wiederum hat jedes Symbol hat eine bestimmte Stelligkeit.
 - (iv) Logische Konnektoren wie $\neg \wedge \vee \rightarrow$ und \equiv
 - (v) Quantoren: \exists (Existenzquantor) und \forall (Allquantor)Auf der Grundlage dieses "Symbolvorrates" soll nun die Definition: der prädikatenlogischen Sprache durchgeführt werden:
- b. Ein (**funktionaler**) **Term** ist induktiv definiert durch
 - (i) Jede Variable ist ein Term
 - (ii) Jede Konstante ist ein Term
 - (iii) Sei f ein n -stelliges Funktionssymbol und seien t_1, \dots, t_n Terme. Dann ist auch $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term.
- c. Induktiver Aufbau prädikatenlogischer **Formeln**:
 - (i) Sei P ein n -stelliges Relationssymbol und seien t_1, \dots, t_n Terme. Dann ist $P(t_1, \dots, t_n)$ eine atomare Formel.
 - (ii) Sind F, G Formeln, so auch $\neg F, (F \wedge G), (F \vee G)$ sowie abgeleitete Verknüpfungen (z.B. $(F \rightarrow G)$).
 - (iii) Ist F eine Formel und x eine Variable, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.

Die prädikatenlogische Sprache ist die Menge aller Formeln, die sich in der oben beschriebenen Weise aus dem Alphabet konstruieren lassen.

Um beim Aufschreiben von prädikatenlogischen Formeln die exzessive Verwendung von Klammern zu vermeiden, wird folgende Vorrangregelung vereinbart:

\neg, \forall, \exists
 \wedge
 \vee
 \rightarrow, \equiv

Die Priorität nimmt von oben nach unten ab.

Beispiele:

- a. Terme: $f(g(x), y)$ oder auch $g(a, f(x,b))$
- b. Formeln:

Man unterscheidet geschlossene und offene Formeln. In geschlossenen Formeln kommen keine freien Variablen vor, in offenen Formeln hingegen schon.

Beispiel geschlossene Formel: $\forall x \forall y (P(f(x), y) \vee Q(x, g(y)))$

Beispiel offene Formel: $\forall y \exists z (Q(x, g(x, y)) \wedge \neg P(x, y))$

x kommt hier als freie Variable, d.h. nicht an einen Quantor gebunden vor.

Hinweis:

- Eine gebundene Variable in einer Formel ist eine Variable, die an einen Quantor der Formel gebunden ist und damit innerhalb des Gültigkeitsbereichs dieses Quantors liegt.
- Eine freie Variable in einer Formel ist eine Variable, die nicht an einen Quantor der Formel gebunden ist und mithin nicht innerhalb des Gültigkeitsbereichs eines Quantors liegt.

Interpretation bzw. Semantik der Prädikatenlogik

Nachfolgend soll nun beschrieben werden, wie einer prädikatenlogischen Sprache eine Semantik zugeordnet werden kann. Die Semantik der Prädikatenlogik beruht wiederum auf der Angabe einer Interpretation, die allerdings wesentlich komplexer ist als in der Aussagenlogik. Zunächst benötigen wir eine Interpretationsstruktur, auch α -Struktur genannt:

$$S_\alpha = (U_\alpha, I_\alpha)$$

Die Interpretationsstruktur ist ein Paar, wobei U_α eine beliebige nicht leere Menge darstellt, die "Universum", "Interpretationsbereich" oder "Individuenbereich" genannt wird. Diese Menge ist die Grundmenge von S_α .

Die Interpretation I_α ist eine Abbildung mit heterogener Grundmenge. Sie ist definiert für n -stellige Relationssymbole P , n -stellige Funktionssymbole f sowie für Variablen x , wobei folgendes gilt:

- i. $I_\alpha : P \rightarrow P_\alpha$ wobei $P_\alpha \in U_\alpha^n$

Es wird jedem n -stelligen Relationssymbol P eine Relation über U_α mit

derselben Stelligkeit zugeordnet.

ii. $I_\alpha : f \rightarrow f^\alpha$ wobei $f^\alpha \in U_\alpha^n \rightarrow U_\alpha$ Es wird jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine Funktion über U_α mit derselben Stelligkeit zugeordnet.

iii. $I_\alpha : x \rightarrow x^\alpha$ wobei $x^\alpha \in U_\alpha$

Jeder Variablen x wird ein Wert aus U_α zugeordnet.

Für eine gegebene Formel F "passt" eine α -Struktur, wenn I_α für alle in F vorkommenden Relationssymbole, Funktionssymbole und Variablen definiert ist. Die *Interpretation von Termen* wird folgendermaßen definiert:

i. $I_\alpha(t) = x^\alpha$ falls $t=x$. Hierbei ist x eine Variable.

ii. $I_\alpha(t) = f^\alpha(I_\alpha(t_1), \dots, I_\alpha(t_n))$ falls $t=f(t_1, \dots, t_n)$

Bemerkung: Für Konstanten c ergibt sich aus (ii) der folgende Spezialfall: $I_\alpha(c) = c_\alpha$

Für atomare Formeln gilt folgende Wahrheitswert-Interpretation:

$$I_\alpha(P(t_1, \dots, t_n)) := \begin{cases} 1 & \text{falls } I_\alpha(t_1), \dots, I_\alpha(t_n) \in P^\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I_\alpha(P(t_1, \dots, t_n)) := \begin{cases} 1 & \text{falls } I_\alpha(t_1), \dots, I_\alpha(t_n) \in P^\alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Verrechnung der Wahrheitswerte für Formeln vom Typ $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ entspricht der Aussagenlogik.

Definition: "Variablenbelegung"

Zur Behandlung der Quantoren wird der Begriff "Belegung von Variablen mit Werten" (kurz: Variablenbelegung) eingeführt. Die Belegung einer in einer Formel freien Variablen x mit einem Wert $v \in U_\alpha$ entsteht dadurch, dass jedes Vorkommen von x durch v ersetzt wird.

Hiermit definieren wir:

(i) Sei $F = \forall x G$

$$I_{\alpha}(F) := \begin{cases} 1 & \text{falls } I_{\alpha}(G')=1 \text{ für alle Varianten von } G' \text{ die durch Belegungen von } x \\ & \text{entstehen.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) Sei $F = \exists x G$

$$I_{\alpha}(F) := \begin{cases} 1 & \text{falls ein } v \in U_{\alpha} \text{ existiert so dass für die durch Belegung von } x \text{ mit } v \\ & \text{entstehende Variante } G' \text{ von } G \text{ gilt } I_{\alpha}(G')=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition: "Modell":

Eine zu einer Formel F passende Interpretationsstruktur $S_{\alpha} = (U_{\alpha}, I_{\alpha})$ heißt ein Modell für F (geschrieben $S_{\alpha} \models F$) falls $I_{\alpha}(F)=1$.

Definition: "Erfüllbarkeit" und "Gültigkeit"

- Falls F mindestens ein Modell besitzt, heißt F erfüllbar, sonst unerfüllbar.
- F heißt gültig, wenn jede zu F passende Interpretationsstruktur ein Modell von F ist. Dafür schreiben wir $\models F$.

Beispiel:

$$F = (P(0) \wedge \forall z (P(n(z)) \vee \neg P(z)) \wedge \forall x \forall y \forall s ((S(x, 0, x) \vee \neg P(x)) \wedge (S(x, n(y), n(s)) \vee \neg S(x, y, s))))$$

Modell 1:

$$U_{\alpha} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$I_{\alpha}(P) = P^{\alpha} = \mathbb{N}_0 (=U_{\alpha})$$

$$I_{\alpha}(S) = S^{\alpha} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}_0^3 / x + y = z\}$$

$$I_{\alpha}(n) = n^{\alpha} = \text{Nachfolgerfunktion } (v \in U_{\alpha} \rightarrow v+1)$$

$$I_{\alpha}(0) = 0^{\alpha} = 0 \in \mathbb{N}_0$$

Damit folgt für die Interpretation I_{α} der Formel F also für $I_{\alpha}(F)$:

$$I_{\alpha}(P(0))=1 \text{ da } 0^{\alpha} \in P^{\alpha}$$

$$I_{\alpha}(\forall z (P(n(z)) \vee \neg P(z)))=1 \text{ da für alle } v \in \mathbb{N}_0 (v+1) \in P^{\alpha} \text{ falls } v \in P^{\alpha}$$

$$I_{\alpha}(\forall x \forall y \forall s ((S(x, 0, x) \vee \neg P(x)) \wedge (S(x, n(y), n(s)) \vee \neg S(x, y, s))))=1 \text{ da für alle } u,$$

$v, w \in \mathbb{IN}_0$ gilt: $u+0=u$ falls $u \in P^\alpha$ sowie $u+(v+1)=s+1$ falls $u+v=s$.

Das obige Modell ist aber nicht das einzige Modell für F. Nachfolgend werden weitere Modell vorgestellt:

Modell 2:

$$U_\alpha = \{a, b\}$$

$$I_\alpha(P) = P^\alpha = \{a, b\}$$

$$I_\alpha(S) = S^\alpha = \{x, y, z\} \in \{a, b\}^3 / z = a \text{ falls } x = y, z = b \text{ sonst}$$

$$I_\alpha(n) = n^\alpha = \text{"Alternierungsfunktion"}, \text{ d.h. } n(v) = a \text{ falls } v = b, n(v) = b \text{ falls } v = a.$$

$$I_\alpha(0) = 0^\alpha = a$$

Modell 3:

$$U_\alpha = \{0, n(0), n(n(0)), \dots\}$$

$$I_\alpha(P) = P^\alpha = U_\alpha$$

$$I_\alpha(S) = S^\alpha = \{(x, y, z) \in U_\alpha^3 / \text{wobei } x=z \text{ und } y=0 \text{ oder } y=n(y'), z=n(z') \text{ und } (x, y', z') \in S^\alpha\}$$

$$I_\alpha(n) = n^\alpha : v \in U_\alpha \rightarrow n(v)$$

$$I_\alpha(0) = 0$$

Ein Modell ist dadurch gekennzeichnet, dass die (semantische) Interpretation sozusagen als konstruktive Deutung der syntaktischen Struktur entsteht. Man bezeichnet solche Modelle als Herbrand-Modelle.

Eine wichtige Eigenschaft der Prädikatenlogik 1.Stufe ist, dass wenn eine Formel überhaupt erfüllbar ist, sie auch ein Herbrand-Modell besitzt.

2. Normalformdarstellung

Zunächst benötigen wir zusätzliche Äquivalenzumformungen für Formeln mit Quantoren:

- i. $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
 $\neg \exists x \neg F \equiv \forall x F$
- ii. $(\forall x F \wedge \forall x G) \equiv \forall x (F \wedge G)$
 $(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x (F \vee G)$
- iii. $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
 $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

Falls in einer Formel der Form $F \wedge Qx G$ (Q steht für Quantor) bzw. $F \vee Qx G$ die Variable x in F nicht frei vorkommt, kann F mit in den Geltungsbereich des Quantors hineingezogen werden: $Qx (F \wedge G)$ bzw. $Qx (F \vee G)$.

Substitution:

$F[x/t]$ bezeichne die Formel, die aus F entsteht, wenn man jedes freie Vorkommen der Variablen x durch den Term t ersetzt. Substitutionen können durch Hintereinanderausführung kombiniert werden.

Beispiel:

Sei $s_1 = [x / (g(y))]$ und $s_2 = [y / a]$

Dann ist für $F = P(x, f(y)) \wedge \forall y Q(y, x)$

$Fs_1 = P(g(y), f(y)) \wedge \forall y Q(y, g(y))$

$Fs_1s_2 = P(g(a), f(a)) \wedge \forall y Q(y, g(y))$

Hierbei muß beachtet werden, daß $s_1s_2 \neq [x / g(a)]$ ist.

Hiermit kann nun das "gebundene Umbenennen" definiert werden:

Definition: "gebundenes Umbenennen"

Sei $F = Qx G$ (Q : Quantor) und sei y eine Variable, die in G nicht vorkommt. Dann gilt: $F \equiv Qy G[x/y]$

Normalformen

Unser Ziel ist, eine prädikatenlogische Formel F , in der evtl. freie Variablen vorkommen, in Klauselform umzuwandeln. Die Klauseldarstellung wird u.a. für die prädikatenlogische Resolution benötigt, auf die wir später noch eingehen werden. Die Umwandlung einer prädikatenlogischen Formel in die Klauselform durchläuft mehrere Zwischenstufen: zunächst wird eine bereinigte Pränexform gebildet, die dann in eine Skolemform umgewandelt wird. Letztere dient dann als Ausgangsbasis für die Umformung in KNF, die man dann nur noch in Klauselform umschreiben muß.

Definition: "Pränexform"

Eine Formel heißt in Pränexform, wenn sie den folgenden Aufbau besitzt

$$Q_1y_1Q_2y_2\dots Q_ny_n F,$$

wobei Q_i Quantoren und y_i Variablen sind. Es kommt außerdem kein Quantor in F vor.

Man nennt in diesem Zusammenhang $Q_1y_1Q_2y_2\dots Q_ny_n$ auch Präfix und F Matrix.

Mit anderen Worten: Eine Pränex-Normalform ist eine Normalform, bei der alle Quantoren links von einem quantorenfreien Ausdruck erscheinen, der Matrix genannt wird.

Definition: "Matrix"

Streicht man aus einer prädikatenlogischen Formel F alle Vorkommen der Quantoren \exists bzw. \forall inklusive der dahinterstehenden Variablen, so erhält man die Matrix zu dieser Formel. Man bezeichnet die Matrix einer Formel F meist symbolisch mit F^* .

Gegeben sei nun eine prädikatenlogische Formel F mit eventuellem Vorkommen von freien Variablen. Um diese Formel in Pränexform zu überführen, sind folgende Schritte zu durchlaufen:

1. Reduktion der logischen Operatoren auf \wedge , \vee und \neg , d.h. Eliminierung aller Vorkommen von \rightarrow und \leftrightarrow durch Reduktion auf \wedge , \vee , \neg in der neu entstehenden Formel G . Dabei können die folgenden Äquivalenzen verwendet werden:
 $A \leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ sowie $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$. Außerdem müssen die Negationen nach innen gezogen werden.
 Ergebnis: Es entsteht eine Formel G , die "erfüllbarkeitsäquivalent" ist zu F
2. Umbenennen der gebundenen Variablen, so dass verschiedene Vorkommen von Quantoren verschiedene Variablen binden und keine freie Variable den gleichen Namen wie eine gebundene Variable trägt ("Bereinigung").
 Hinweis: Es gibt zu jeder Formel F eine äquivalente Formel G in bereinigter Form. Man nennt eine Formel "bereinigt", wenn es keine Variable gibt, die in der Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommt, und wenn hinter allen in der Formel befindlichen Quantoren verschiedene Variablen stehen.
 Ergebnis: Es entsteht eine zu F und G äquivalente Formel H .
3. "Nach-vorne-Ziehen" der Quantoren durch wiederholte Anwendung von Äquivalenzumformungen (s. Anfang Kap. 2.6) und Existenz-Abschluss der freien Variablen.
 Ergebnis: Eine Formel I , die erfüllbarkeitsäquivalent zu F , G und H ist.

Nach Durchführung der Schritte (1) bis (3) erhält man die sog. bereinigte **Pränexform**.

Definition: "Skolemisierung" und "Skolemform"

Unter Skolemisierung versteht man das Ersetzen von an Existenzquantoren gebundenen Variablen in einer bereinigten Pränexform durch Konstanten (Skolem-Konstanten) oder geeignete Funktionen (Skolem-Funktionen), sowie die Eliminierung der Existenzquantoren. Die aus diesem Prozeß resultierende Normalform wird Skolemform genannt.

Wir betrachten eine Formel in bereinigter Pränexform $F = \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y Q_1 z_1 \dots Q_m z_m G$ wobei Q_i Quantoren sind. Die Skolemisierung der Variablen y führt dann zu der Formel

$F' = \forall x_1 \dots \forall x_n Q_1 z_1 \dots Q_m z_m G[y / f(x_1, \dots, x_n)]$ wobei f ein beliebiges n -stelliges "neues" (d.h. nicht in G vorkommendes) Funktionssymbol ist. Auf diese Weise können sukzessive alle \exists eliminiert werden.

Es gilt: F und F' sind "erfüllbarkeitsäquivalent", d.h. F ist erfüllbar g.d.w. F' unerfüllbar ist.

Beispiel:

Die bereinigte Pränexform $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)((\neg A(x, y, z) \vee C(u, z)) \wedge (\neg B(y) \vee C(u, z)))$ kann in die folgende Skolemform umgewandelt werden:
 $(\forall x)(\forall y)(\forall u)((\neg A(x, y, f(x, y)) \vee C(u, f(x, y))) \wedge (\neg B(y) \vee C(u, f(x, y))))$

4. Wir gehen von der obigen Pränexform I aus und bilden eine zu I erfüllbarkeitsäquivalente Skolemform J .
5. Umformung der Matrix von J in KNF und Aufschreiben dieser Formel als Klauselmenge.

Das beschriebene Vorgehen (1) - (5) soll nun nachfolgend noch einmal an einem Beispiel verdeutlicht werden:

$$F = \forall y (\forall x (P(z, x) \vee Q(x, y)) \rightarrow (\exists x P(z, x) \vee \forall x Q(x, y)))$$

1. Reduktion der logischen Operatoren auf \wedge , \vee und \neg :

$$F \equiv \forall y (\exists x (\neg P(z, x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee (\exists x P(z, x) \vee \forall x Q(x, y)))$$

2. Bereinigung:

$$F \equiv \forall y (\exists x (\neg P(z, x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee (\exists x P(z, x) \vee \forall x' Q(x', y)))$$

3. "Nach-vorne-Ziehen" der Quantoren:

$$F \equiv \exists z \forall y \exists x \forall x' ((\neg P(z, x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee P(z, x) \vee Q(x', y))$$

4. Skolemisierung:

Zu diesem Zweck wird z durch die Konstante a und x durch $f(y)$ ersetzt. Damit folgt:

$$F \equiv \forall y \forall x' ((\neg P(a, f(y)) \wedge \neg Q(f(y), y)) \vee P(a, f(y)) \vee Q(x', y))$$

5. Umformen der Matrix von F in KNF und Aufschreiben in Klauselform:

$$(\neg P(a, f(y)) \vee P(a, f(y)) \vee Q(x', y)) \wedge (\neg Q(f(y), y) \vee P(a, f(y)) \vee Q(x', y))$$

Damit folgt für F in KNF:

$$F \equiv \forall y \forall x' 1 \wedge (\neg Q(f(y), y) \vee P(a, f(y)) \vee Q(x', y))$$

$$F \equiv \{ \{ \neg Q(f(y), y), P(a, f(y)), Q(x', y) \} \}$$

Allgemein gilt:

Jede prädikatenlogische Formel F lässt sich in eine Skolem-Normalform F' überführen, wobei F' von der Form $F' = \forall x \dots \forall x_n G$ (G quantorenfrei und in KNF) und F und F' erfüllbarkeitsäquivalent.