4.5 Invarianten

5.1 Wiederholung

Gemäß 4. 2.9 wurde ein N durch die Matrix $\underline{N}$ beschrieben.

Sei N=(S,T;F,K,W,M) ein S/T-System.

$t \in T \mapsto \underline{t}: S \to \mathbb{Z}$ Vektor vermöge

$$\underline{t}(s) := \begin{cases} W(t,s) & \text{falls } s \in t^\bullet \setminus {}^\bullet t \\ -W(s,t) & \text{falls } s \in {}^\bullet t \setminus t^\bullet \\ W(t,s)-W(s,t) & \text{falls } s \in {}^\bullet t \cap t^\bullet \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\underline{N}(s,t) := \underline{t}(s)$

5.2 Definition: Sei N ein S/T-System.

1) $i: S \to \mathbb{Z}$ heißt **S-Invariante** von N $:\Leftrightarrow$ $\underline{N}' \cdot i = 0$

2) $i: T \to \mathbb{Z}$ heißt **T-Invariante** von N $:\Leftrightarrow$ $\underline{N} \cdot i = 0$

Damit: im folgenden sind Lösungen homogener Gleichungssysteme gefragt.

5.3 Korollar:

Seien i_1, i_2 S-(T)-Invarianten $\Rightarrow$ i_1+i_2 und $z \cdot i_1$ für $z \in \mathbb{Z}$ sind S-(T)-Invarianten.

Was bedeuten sie in diesem Kontext?

4.5.1 Zu **S-Invarianten**

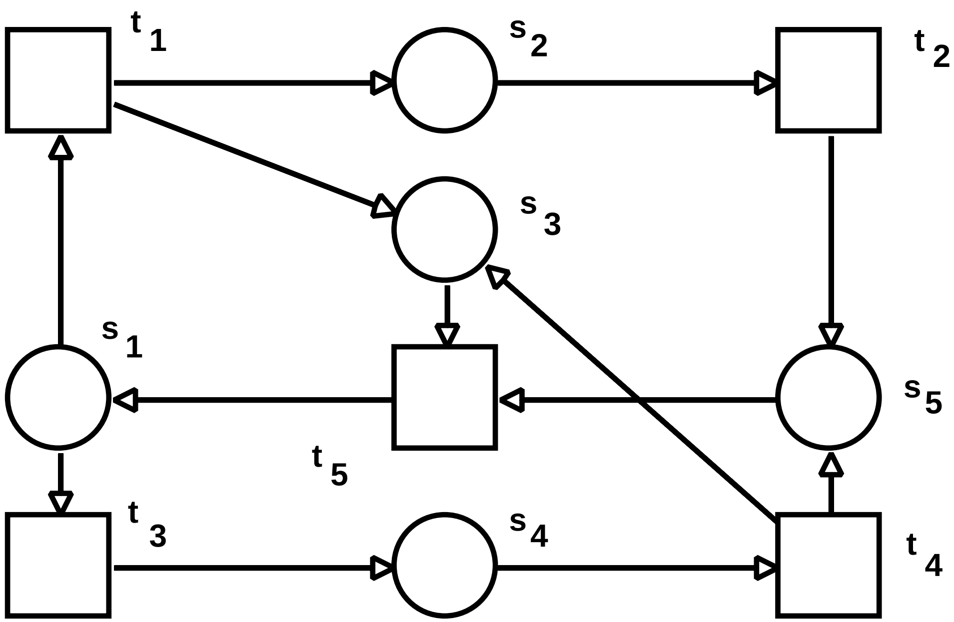
5.4 Bedeutung von S-Invarianten veranschaulichen:

Wie charakterisiert man Stellenmengen $S \subseteq S_N$ von N, deren Gesamtzahl an Marken bei Schalten von Transitionen unverändert bleiben?

(Seien dazu speziell W(s,t), W(t,s) $\in$ {0,1}, d.h. die Pfeilgewichte seien immer 1.)

5.4.1 **Idee**: Jede Transition muß für jede Marke, die sie beim Schalten aus S abzieht, genau eine Marke wieder in S einfließen lassen!

5.4.1.1 Beispiel hierzu:



5.4.1.2 Beh.: i_1' bis i_4' mit • $i_1' = (1,0,1,1,0)$ • $i_2' = (1,1,0,1,1)$

• $i_3' = (2,1,1,2,1)$ • $i_4' = (0,1,-1,0,1)$

sind S-Invarianten zu obenstehendem Beispiel .

5.4.2 Allgemein (**ohne** die Einschränkung von $W(x,y)\in\{0,1\}$):

Falls t schaltet, ändert sich die Markensumme auf $S \subseteq S_N$ nicht

$$\Leftrightarrow \sum_{s\in\bullet t\cap S} W(s,t) = \sum_{s\in t\bullet\cap S} W(t,s) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \sum_{s\in t\bullet\cap S} W(t,s) - \sum_{s\in\bullet t\cap S} W(s,t)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \sum_{s\in(t\bullet\setminus\bullet t)\cap S} W(t,s) + \sum_{s\in(\bullet t\cap t\bullet)\cap S} W(t,s) - \sum_{s\in(\bullet t\setminus t\bullet)\cap S} W(s,t) - \sum_{s\in(\bullet t\cap t\bullet)\cap S} W(s,t) \Leftrightarrow \quad 0 = \sum_{s\in S} \underline{t}(s) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t}' \cdot c_S = 0$$

(Anmerkung: t' bedeutet die transponierte Matrix zu t)

dabei sei $c_S: S_N \to \{0,1\}$

$$s \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } s\in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5.4.3 Also: Die Markensumme auf S bleibt bei Schalten beliebiger Transitionen konstant

$\Leftrightarrow \underline{N}' \cdot c_S = 0 \Leftrightarrow$ der charakteristische Vektor zu S ist Lösung des homogenen

Gleichungssystems, beschrieben durch N'.

Siehe Beispiele i_1, i_2 oben!

5.4.4 **Interpretation** positiver Invarianten:

5.4.4.1 Im Beispiel aus 5.4.1.1 läßt sich intuitiv sagen, daß bei Schalten von t_1 gilt: Das "Gewicht" von s_1 ist doppelt so hoch wie bei s_2 und s_3. Analog wiegt s_4 doppelt so viel wie die Marke auf s_3 und s_5.

⇒ **"Gewichtete" Konstanz** im Beispiel:

Seien: $M_1, M_2 \in \mathit{M}$, $t \in \{t_i | i=1..5\}$, $M_1[t>M_2$.

Es gilt: $2 \cdot M_1(s_1)+2 \cdot M_1(s_4)+M_1(s_2)+M_1(s_3)+M_1(s_5) =$

$$2 \cdot M_2(s_1)+2 \cdot M_2(s_4)+M_2(s_2)+M_2(s_3)+M_2(s_5)$$

d.h. $M_1' \cdot i_3 = M_2' \cdot i_3$ mit $i_3=(2,1,1,2,1)$

5.4.4.2 Betrachte $\{s_2,s_3,s_5\}$: Die Markenzahl auf s_3 ändert sich in demselben Maße wie die Summe der Markenzahlen auf s_2 und s_5

$\Leftrightarrow \forall \; M_1, M_2 \in M_N[>^*$

$(\forall \; t \in T_N: M_1[t>M_2 \Rightarrow \; M_1(s_2)+M_1(s_5)-M_1(s_3) \; = M_2(s_2)+M_2(s_5)-M_2(s_3)$

$\Leftrightarrow \; M_1' \cdot i_4 = M_2' \cdot i_4 \;)$

5.5 Korollar:

Sei N ein S/T-System, i eine positive S-Invariante (d.h. $i(s) \geq 0$ und $\exists\ s' \in S$: $i(s') > 0$).

Sei $S := \{s \in S_N \mid i(s) > 0\}$.

Dann gilt: $S\bullet = \bullet S$.

Beweis: (indirekt)

Annahme: $\exists\ t \in S\bullet \setminus \bullet S$ $\Rightarrow$ $\exists s \in S$: $\underline{t}(s)<0$ und $\forall\ s \in S$: $\neg(\underline{t}(s)>0) \Rightarrow$ $\underline{t}' \cdot c_S < 0$

$\Rightarrow$ (da i positiv) $\underline{t}' \cdot i < 0$ Widerspruch zu: i ist Invariante.

(analog: $t \in \bullet S \setminus S\bullet \Rightarrow$ $\underline{t}' \cdot i > 0$).

5.5.1 **Intuitiv**: Stellenmengen mit konstanter Markenzahl können aus Pfeilmengen gewonnen

werden, die von einer Stelle aus $\bullet t$ zu einer Stelle aus $t\bullet$ führen.

5.6 Satz:

Sei N ein S/T-System. $\forall$ i S-Invariante von N, $\forall\ M \in M_N[\ >*$: $M' \cdot i = M_N' \cdot i$

Beweis: $M_1, M_2 \in M_N[\ >*$, $t \in T_N$, $M_1[t>M_2$

$\Rightarrow$ $M_2 = M_1 + \underline{t}$ (4.2.9.4 i)

$\Rightarrow$ $M_2' \cdot i = (M_1+\underline{t})' \cdot i = M_1' \cdot i$, da $\underline{t}' \cdot i = 0$ (, da i S-Invariante.)

Die "Umkehrung" gilt nur unter Zusatz:

5.7 Lemma:

Sei N ein S/T-System, in dem jedes $t \in T_N$ mindestens einmal schalten kann.

Sei $i: S_N \to \mathbb{Z}$ Stellenvektor, so daß $\forall\, M \in M_N[\ >^*$:

$$M' \cdot i = M_N' \cdot i \Rightarrow \text{ i ist S-Invariante.}$$

Beweis:

Sei $t \in T_N$, $M \in M_N[\ >^*$ und t unter M aktiviert; sei $M[t>\overline{M}$:

$\Rightarrow M' \cdot i = \overline{M}' \cdot i = (M+\underline{t})' \cdot i = M' \cdot i + \underline{t}' \cdot i$

$\Rightarrow \underline{t}' \cdot i = 0$

5.8 Korollar:

Sei N ein S/T-System, $S \subseteq S_N$, so daß c_S (charakteristischer Vektor zu S) S-Invariante ist.

$$\forall\, M \in M_N[\ >^*: \quad \sum_{s \in S} M(s) = \sum_{s \in S} M_N(s)$$

Beziehung zwischen der Beschränktheit der Markenzahl und S-Invarianten :

5.9 Definition:

Ein S/T-System N heißt **von S-Invarianten überdeckt**

$$:\Leftrightarrow \forall\ s \in S_N\ \exists \text{ i positive S-Invariante: } i(s) > 0$$

5.10 Korollar:

Ein S/T-System N sei von positiven S-Invarianten überdeckt.

$\Rightarrow \exists$ i positive S-Invariante: $(\forall\ s \in S_N : i(s) > 0)$

Beweis: siehe Korollar 5.3 .

5.11 Definition:

Ein S/T-System N heißt **beschränkt**

$:\Leftrightarrow M_N$ ist endlich und $\exists\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ M \in M_N[\ >^*\ \forall\ s \in S_N: M(s) \leq n.$

5.12 Satz:

Sei N ein S/T-System, M_N endlich.

N ist von S-Invarianten überdeckt $\Rightarrow$ N ist beschränkt.

Beweis:

Seien $s_0 \in S_N$, i positive S-Invariante mit $i(s_0)>0$, $M \in M_N[\ >^*$.

$$M(s_0) \cdot i(s_0) \leq \sum_{s \in S_N} M(s) \cdot i(s) = M' \cdot i = M_N' \cdot i$$

$\Rightarrow M(s_0) \leq (M_N' \cdot i) / i(s_0)$.

4.5.2 Beiträge zu T-Invarianten

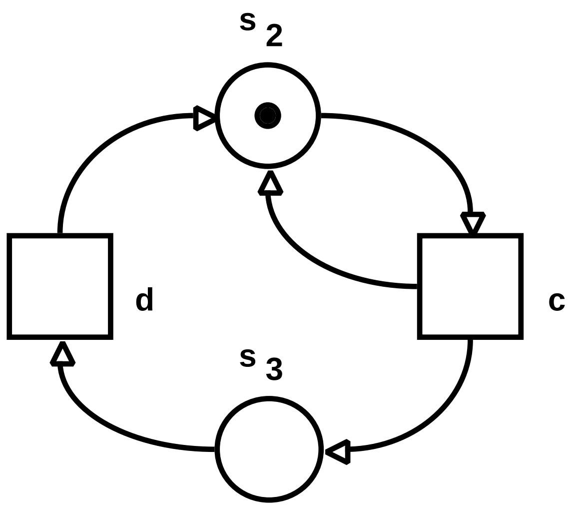
5.13 Definition:

Sei T Transitionenmenge (z.B. eines S/T-Systems N)

Viel: $T^* \to \{v: T \to \mathbb{N}\}$ (Vielfachheit der Vorkommen)

$t_{i_1} \ldots t_{i_n} \mapsto v$ mit $v(t) = |\{ j \mid t_{i_j} = t\}|$

5.13.1 Beispiel:



$T=\{c,d\}$: cccdcd $\mapsto$ (4,2)

5.14 Satz:

Sei N ein S/T-System. Seien $M_i \in M_N[>^*$, i=0..n, $t_j \in T_N$ j=1..n, so daß

$M_0[t_1>M_1[t_2>\ldots[t_n>M_n$.

Dann gilt: $M_0 + \underline{N} \cdot v = M_n$.

Beweis: induktiv. (Wesentlich ist dabei: $M[t>M' \Leftrightarrow M+\underline{t}=M'$)

Die Umkehrung gilt i.a. nicht (freie Kapazitäten nötig); jedoch:

5.15 Satz:

Sei N ein S/T-System mit $\forall\, s\in S_N$: $K_N(s) = \omega$.

$\forall\ M,\overline{M}\in \mathcal{M}\ \forall\ v:T\to\mathbb{N}\quad (M+\underline{N}\cdot v = \overline{M} \quad\Leftrightarrow$

$\exists\ M°: S\to\mathbb{N}\ \exists\ t_{i_1},...,t_{i_n}\in T_N: (M+M°)[t_{i_1}>...[t_{i_n}>(\overline{M}+M°)\quad \forall\ t\in T_N: v(t) = |\{j|\ t_{i_j}=t\}|)$

Beweis: "<=" Satz 5.14 sowie: "$\Rightarrow$ " induktiv

5.16 Definition:

$M\in \mathcal{M}$ zu einem S/T-System N ist **reproduzierbar**

$:\Leftrightarrow\ \exists\ \overline{M} \in M[\ >^* \quad \overline{M} \neq M \quad M \in \overline{M}[\ >^*$

5.17 Korollar:

Sei N ein S/T-System mit $\forall\ s \in S_N$: $K_N(s)=\omega$.

Ist M reproduzierbar und $\overline{M} \in M$, so ist $M + \overline{M}$ reproduzierbar.

ohne Beweis.

5.18 Satz:

Sei N definiert wie in Korollar 5.17 .

N besitzt eine positive T-Invariante $v\neq 0$ $\Leftrightarrow$ N besitzt eine reproduzierbare Markierung.

ohne Beweis.

5.19 Definition:

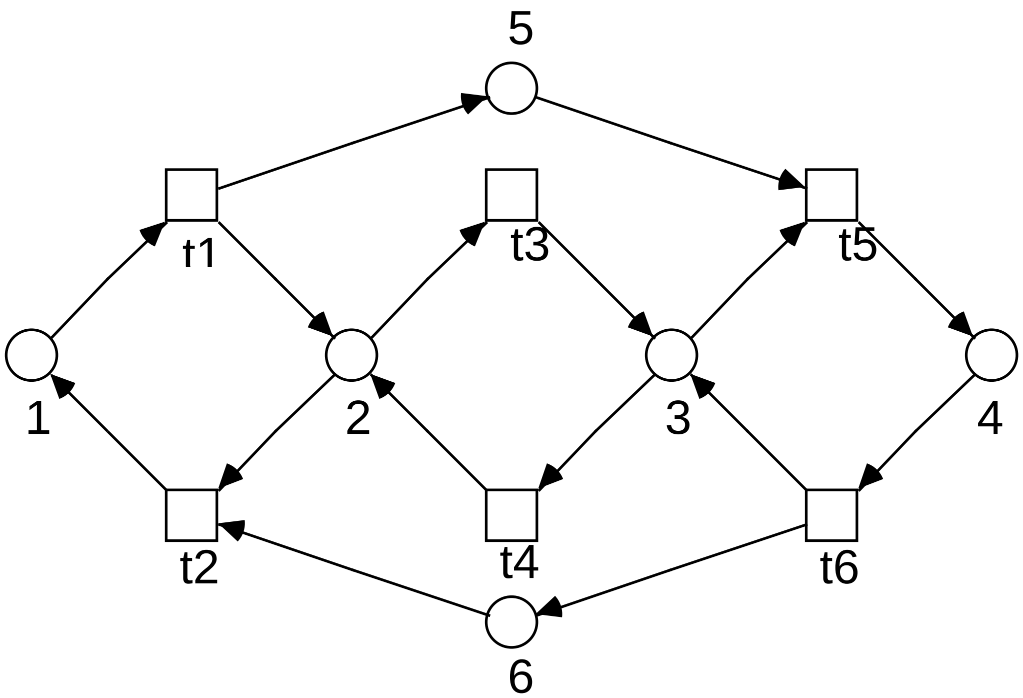
Sei N ein S/T-System, i T-Invariante hierzu.

i heißt **realisierbar** $:\Leftrightarrow$

$\exists\, M_0 \in M_N[\,>^* \;\exists\, t_{i_1}..t_{i_n}, M_1..M_n \;\; M_0[t_{i_1}>..[t_{i_n}>M_n$, so daß $\forall\; t \in T_N$: $i(t)=|\{j|\; t_{i_j}=t\}|$

Vorsicht: nicht jede positive T-Invariante ist realisierbar.

5.19.1 Beispiel :



Für M_N = (1,0,0,0,0,0) ist die T-Invariante i' = (1,1,0,0,1,1) nicht realisierbar, jedoch für M_N^* =(1,0,1,0,0,0).

5.20 Definition:

Ein S/T-System N heißt **von T-Invarianten überdeckt**

$\Leftrightarrow \forall\ t \in T_N\ \exists$ i positive T-Invariante: $i(t) > 0$

5.21 Korollar:

Ist N ein S/T-System, von T-Invarianten überdeckt, so gilt:

$\exists$ i positive T-Invariante $\forall\ t \in T_N$: $i(t) > 0$.