Übungen zur Modellierung, Wintersemester 2005/06
Gudrun Fischer, Sprechstunde jeweils Montag, 15-16 Uhr, LF 138
modellierung@is.informatik.uni-duisburg.de

Materialblatt A

Beispiel 1: Markierungsalgorithmus bei Unerfüllbarkeit

Gegeben sei die folgende Formel F_1 (F_2 von Seite 5 oben im Skript):

$F_1 = ((A \wedge E \to 0) \wedge (1 \to A) \wedge (A \wedge C \to E) \wedge (A \wedge F \to C) \wedge (1 \to F))$

F_1 ist eine Hornformel und liegt schon in Implikationsschreibweise vor. Der Markierungsalgorithmus kann also direkt angewendet werden:

1. Markiere A und F wegen $(1 \to A)$ und $(1 \to F)$.
2. Markiere C wegen $(A^* \wedge F^* \to C)$.
3. Markiere E wegen $(A^* \wedge C^* \to E)$.
4. Stopp mit Ergebnis „unerfüllbar" wegen $(A^* \wedge E^* \to 0)$.

F_1 ist also unerfüllbar.

Beispiel 2: Markierungsalgorithmus und minimales Modell

Gegeben sei die folgende Formel F_2 (F_1 von Seite 5 oben im Skript):

$F_2 = ((A \wedge B \to 0) \wedge (1 \to A) \wedge (A \wedge C \to E) \wedge (A \wedge F \to C) \wedge (1 \to F))$

F_2 ist wiederum eine Hornformel und liegt schon in Implikationsschreibweise vor. Der Markierungsalgorithmus kann also angewendet werden:

1. Markiere A und F wegen $(1 \to A)$ und $(1 \to F)$.
2. Markiere C wegen $(A^* \wedge F^* \to C)$.
3. Markiere E wegen $(A^* \wedge C^* \to E)$.
   Weitere Markierungen sind nicht möglich, da keine passende Implikation mehr gefunden wird.
4. Stopp mit Ergebnis „erfüllbar".

F_2 ist also erfüllbar.

Die Formel mit den Markierungen lautet nun:

$((A^* \wedge B \to 0) \wedge (1 \to A^*) \wedge (A^* \wedge C^* \to E^*) \wedge (A^* \wedge F^* \to C^*) \wedge (1 \to F^*))$

Da A, C, E und F markiert sind, und B nicht markiert ist, besitzt F_2 das minimale Model β mit $\beta(A) = \beta(C) = \beta(E) = \beta(F) = 1$ und $\beta(B) = 0$.

Beispiel 3: Markierungsalgorithmus ausgehend von KNF

Gegeben sei die folgende in KNF vorliegende Formel:

$F_3 = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg D \vee B) \wedge D \wedge$
$(\neg C \vee \neg E \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee C \vee \neg A)$

F_3 ist eine Hornformel. Um den Markierungsalgorithmus anwenden zu können, schreiben wir F_3 zunächst als Konjunktion von Implikationen:

$F_3 \equiv (A \wedge B \wedge C \rightarrow 0) \wedge (D \rightarrow A) \wedge (A \wedge D \rightarrow B) \wedge (1 \rightarrow D) \wedge$
$(A \wedge C \wedge E \rightarrow 0) \wedge (A \wedge B \rightarrow C)$

Der Markierungsalgorithmus läuft nun wie folgt ab:

1. Markiere D wegen $(1 \rightarrow D)$.
2. Markiere A wegen $(D^* \rightarrow A)$.
3. Markiere B wegen $(A^* \wedge D^* \rightarrow B)$.
4. Markiere C wegen $(A^* \wedge B^* \rightarrow C)$.
5. Stopp mit Ergebnis „unerfüllbar" wegen $(A^* \wedge B^* \wedge C^* \rightarrow 0)$.

F_3 ist also unerfüllbar.

Bemerkungen:

- Man beachte die Umformung von Hornklauseln (Disjunktionen mit höchstens einem positiven Literal) in Implikationen.
- In diesem Beispiel wurde die Unerfüllbarkeit nachgewiesen, obwohl noch nicht alle Variablen markiert waren.

Beispiel 4: Markierungsalgorithmus ohne 1-Implikationen

Gegeben sei die folgende Formel in Implikationsschreibweise:

$F_4 = (A \wedge B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A)$

F_4 ist eine Hornformel und liegt schon in der richtigen Schreibweise vor, der Markierungsalgorithmus kann also direkt angewendet werden:

1. F_4 enthält keine Teilformeln der Form $(1 \rightarrow \ldots)$, daher wird in diesem Schritt nichts markiert.
2. Stopp mit Ergebnis „erfüllbar", da F_4 keine Implikationen enthält, deren linke Seite vollständig markiert wäre.

F_4 ist somit erfüllbar. Da gar keine Variablen markiert sind, lautet das dazugehörige minimale Modell: β mit $\beta(A) = \beta(B) = \beta(C) = 0$